HM III Zusammenfassung

Mehrdim. Integration

Weg: · Stetige Abb. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt Weg. Ist dieser stückweise stg. diffbar, dann Integrationsweg

· Länge: $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'\|_2 \, dt$

· Sind $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ zwei Int-Wege und $\exists$ diffbare, streng monotone Fkt. $g : I \to J$ mit $\varphi = \psi \circ g$, dann heißen φ und ψ äquivalent.

· Äquivalenzklasse von Wegen heißt Kurve (Äquiv. Wege haben selbe Länge)

· Int-Weg heißt nirgends konstant $\Leftrightarrow \gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$

· Bogenlänge: $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|_2 \, d\tau$; Parametrisierung n.d. Bogenlänge: $\Gamma = \gamma \circ s^{-1}$

Kurvenintegral: Fkt: $\int_\gamma f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$

VF: $\int_\gamma \langle V, d\underline{x} \rangle := \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$

Abschätzung: $\left| \int_K f ds \right| \leq L(K) \cdot \max_{\underline{x} \in K} |f(\underline{x})|$

Gradientenfeld: · Ist $V = \nabla F$ Gradientenfeld, dann gilt für jeden Weg γ: $\int_\gamma \langle V, d\underline{x} \rangle = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

($\Rightarrow$ für geschlossenen Weg: $\int_\gamma \langle V, d\underline{x} \rangle = 0$)

· Integrabilitätsbedingung: $\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ (notwend. Bedingung für Potenzial)

· Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es ein $\underline{s} \in G$ ("Sternpunkt") gibt, s.d. zu jedem $\underline{x} \in G$ die Strecke von $\underline{s}$ nach $\underline{x}$ in G verläuft. Ist jedes $\underline{s} \in G$ Sternpunkt, dann heißt G konvex.

· Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und $V : G \to \mathbb{R}^n$ stg. diffb. VF, welches d. Int.-Bed. genügt. Dann hat V Stammfkt.

· Bestimmung Stammfkt.: (i) $\gamma_{\underline{x}} : [0,1] \to G : t \to \underline{s} + t(\underline{x} - \underline{s})$

$$F(\underline{x}) = \int_{\gamma_{\underline{x}}} \langle V, d\underline{x} \rangle$$

(ii) Versuchen (Variation d. Konstanten)

[Ist G kein Sterngebiet, wähle große Teilmenge $\tilde{G} \subset G$, s.d. $\tilde{G}$ sternförmig. Bestimme Stammfkt. auf $\tilde{G}$. Prüfe, ob diese auch Stammfkt. auf G liefert. Wenn nicht, versuche geschlossenen Weg γ mit $\oint \langle V, d\underline{x} \rangle \neq 0$ zu finden.]

Gauß'scher Int-Satz: (Ebene) · Int-Weg heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$. Ist γ injektiv, dann heißt einfach.

· So ein Weg zerlegt Ebene in 2 (zusammenhängende) Teile: beschränkte ("Innere") und unbeschränkte ("Äußere"). In Fahrtrichtung: Innere liegt links.

· Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ das Innere einer einfach geschlossenen Kurve mit posit. Orientierung. Auf $G \cup \partial G$ seien f, g definiert und stg. diffb. Funktionen.

Dann gilt: $\int_{\partial G} f \, dy - g \, dx = \int_G \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) d(x,y)$ (Gauß i.d. Ebene)

Spezialfall: $f = x, g = y$: $\int_G d(x,y) = \frac{1}{2} \int_{\partial G} x \, dy - y \, dx$

(Allgemein) · Ist G wie oben, und in jedem Punkt d. Randes bezeichne $\underline{n}$ die „äußere Normale". Dann ist für jedes stg. diffb. VF V auf $G \cup \partial G$

$$\int_{\partial G} \langle V, \underline{n} \rangle \, ds = \int_G \operatorname{div} V \, d\underline{x} \quad \text{mit } \operatorname{div} V = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_j}{\partial x_j}$$

(· ist ∂G durch Parametrisierung gegeben: $\underline{n}$ ergibt sich durch Normierung d. äußeren Produktes d. Spalten d. Fkt-Matrix d. Parametrisierung
· wird falsch, wenn V nur auf Innerem von G stg. diffbar ist bis auf den Rand?)

Höher-Dim. Objekte: · Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ Gebiet, offen, $\gamma : U \to \mathbb{R}^n$ sei stg. diffb und γ' habe in jedem Punkt von U den Rang d. Dann heißt γ eine reguläre d-dim. Fläche im $\mathbb{R}^n$

· Seien $\gamma_1, \gamma_2 : U_i \to \mathbb{R}^n$ reguläre d-dim. Flächen, beide injektiv und mit denselben Bild. Gilt dann, dass $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : U_1 \to U_2$ in jedem Punkt von U_1 Funktionaldeterminante > 0 hat, dann heißen sie äquivalent.

· Äquivalenzklasse von regulären Flächen heißt d-dim. Flächenstück.

- Ist über einer offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine stg. diffb. Fkt. $F: M \to \mathbb{R}$ gegeben, dann kann auf $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : F(\underline{x}) = 0\}$ der Satz über implizite Fkt. angenommen werden, d.h. diese Menge besteht (meist) aus endl. vielen Flächenstücken.

- Sei $U \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma: U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $f: \gamma(U) \to \mathbb{R}$ eine stg. Fkt. Dann ist
$$\int_\gamma f \, d\sigma = \int_U f(\gamma(\underline{u})) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma}{\partial u_2} \right\|_2 du_1 \, du_2$$
(Seien γ_j äquivalente reguläre Fläche. Dann gilt $\int_{\gamma_1} f d\sigma = \int_{\gamma_2} f d\sigma = \dots = \int_{\gamma_j} f d\sigma$)

- Kugelfubini: K_R = Vollkugel mit Radius R; $K_R = \bigcup_{0 \le r \le R} K_r$
$$\hookrightarrow \int_{K_R} f(x,y,z) \, d(x,y,z) = \int_0^R \left(\int_{K_r} f \, d\sigma \right) dr$$

- Volumen d. d-dim. Spats: $\mathrm{vol}\, S(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_d) = \sqrt{\det {}^t A A}$ mit $A = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_d)$
- Vektorprodukt im $\mathbb{R}^n$: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ lin. unabhängig. Bilde $M = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1})$. Sei M_i die Matrix, die aus M entsteht durch Streichen d. i-ten Zeile.
$$\underline{w} = \underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2 \wedge \dots \wedge \underline{v}_{n-1} = \begin{pmatrix} \det M_1 \\ -\det M_2 \\ \vdots \\ (-1)^{n+1} \det M_n \end{pmatrix} \quad \dots \text{ äußere Produkt}$$

- Sei $1 \le d < n$, $U \subset \mathbb{R}^d$ Gebiet und $\gamma: U \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre (d-dim.) Fläche. Für jedes $\underline{u} \in U$ sei $\gamma'(\underline{u})$ die Funktionalmatrix von γ. Dann heißt
$$g(\underline{u}) = \det {}^t\gamma'(\underline{u}) \cdot \gamma'(\underline{u}) \quad \text{"Riemannsche Metrik"}$$
- Für Fkt. auf $\gamma(U)$ definiere: $\int_\gamma f \, d\underline{s} := \int_U f(\gamma(\underline{u})) \cdot \sqrt{g(\underline{u})} \, d\underline{u}$ (Integral von f über d-dim. Fläche)

Spezialfälle: $d = n-1 \Rightarrow g(\underline{u}) = \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial u_{n-1}} \right\|_2^2$

über Graph $\Rightarrow \int_\gamma f \, d\underline{s} = \int_U f(\underline{u}, h(\underline{u})) \cdot \sqrt{1 + \|\nabla h\|_2^2} \, d\underline{u}$

- Flussintegral: Ist $\gamma: U \to \mathbb{R}^n$ ein $(n-1)$-dim. reguläres Flächenstück und $\underline{n}: \gamma(U) \to \mathbb{R}^n$ ein stg. Normalenfeld auf d. Fläche mit $\|\underline{n}\|_2 = 1$, dann heißt $\forall$ stg. VF $V: \gamma(U) \to \mathbb{R}^n$ das Integral $\int_\gamma \langle V, \underline{n} \rangle \, d\underline{s}$ auch Flussintegral von V durch die Fläche $\gamma(U)$

- Green'sche Formeln: Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein stückweise stg. diffb. reguläres Polyeder mit äußerem Normalenfeld $\underline{n}$. Seien $f, g: G \to \mathbb{R}$ 2x stg. diffbar. Dann gilt
(i) $\int_G \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d\underline{x} = \int_{\partial G} f \, \partial_{\underline{n}} g \, d\underline{s} - \int_G f \, \Delta g \, d\underline{x}$

(ii) $\int_G (f \Delta g - g \Delta f) \, d\underline{x} = \int_{\partial G} (f \, \partial_{\underline{n}} g - g \, \partial_{\underline{n}} f) \, d\underline{s}$

$\boxed{\text{Harmonische Fkt.}}$: Laplace-Operator: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad}$

- $\Delta f = g$; partielle Dgl, die nach ∇f mit Potential (f) und gegebener Divergenz sucht.
- Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen und $h: U \to \mathbb{R}$ 2x diffbar mit $\Delta h = 0$ auf U, dann heißt h harmonisch auf U (bilden $\mathbb{R}$-VR).
- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h: U \to \mathbb{R}$ harmonisch auf U. Dann gilt für jeden stückweise stg. diffb. regulären Polyeder $G \subset U$: $\int_{\partial G} \overbrace{\partial_{\underline{n}} h}^{\langle \nabla h, n \rangle} \, d\underline{s} = 0$ (es gilt auch die Umkehrung)

- Mittelwerteigenschaft: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h: U \to \mathbb{R}$ harmonisch. Sei $K_r(\underline{a}) = \{\underline{x} : \|\underline{x} - \underline{a}\|_2 \le r\} \subset U$
Dann gilt: $h(\underline{a}) = \dfrac{\int_{\partial K_r(\underline{a})} h(\underline{x}) \, d\underline{s}}{\int_{\partial K_r(\underline{a})} d\underline{s}} = \dfrac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial K_r(\underline{a})} h(\underline{x}) \, d\underline{s}$

- Max-Prinzip: Ist h harmonisch und nimmt ein Max. auf U an, ist h konstant (h nimmt Max/Min auf ∂U an)

Dirichlet's RWP: · gegeben sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wie oben, auf $\partial\Omega$ sei eine stg. diffb. Fkt. $g: \partial\Omega \to \mathbb{R}$ gegeben.
Gesucht ist Fkt. $u: \underbrace{\overline{\Omega}}_{\Omega \cup \partial\Omega} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) u 2x stg. diffbar auf Ω
(ii) u stg. auf $\overline{\Omega}$
(iii) $\Delta u = 0$ auf Ω, $u = g$ auf $\partial\Omega$

· Dieses Problem hat höchstens eine Lsg.
· Green'sche Darstellung: $\Gamma(r) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n} r^{2-n} & (n \geq 3) \\ \frac{1}{2\pi} \log r & (n = 2) \end{cases}$

$$\Gamma(\underline{x}, \underline{y}) = \Gamma(\|\underline{x} - \underline{y}\|)$$

$$u(\underline{y}) = \int_\Omega (\Gamma(\underline{x}, \underline{y}) \Delta u) \, d\underline{x} - \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(\underline{x}, \underline{y}) \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \underline{n}}\right) d\underline{s} \qquad (1)$$

u harmonisch: $$u(\underline{y}) = -\int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(\underline{x}, \underline{y}) \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \underline{n}}\right) d\underline{s} \qquad (2)$$
u 2x stg. diffb. und $u(\underline{x}) = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus K_R(\underline{a})$ mit $R > 0$ geeignet,
gilt (1) mit $\Omega = K_{2R}(\underline{a})$.
$$u(\underline{y}) = \int_\Omega \Gamma(\underline{x}, \underline{y}) \Delta u(\underline{x}) \, d\underline{x} \qquad (3)$$

· ist u harmonisch auf Ω, gilt (2), u ∞ oft diffbar auf Ω. ist $\underline{a} \in \Omega$ und $K_r(\underline{a}) \subset \Omega$, dann konv. die Taylorreihe von u mit Entwicklungspunkt $\underline{a}$ auf ganz $K_r(\underline{a})$ absolut.
· Addiere 2. Green'sche Formel auf Darstellungsformel; $G = \Gamma + h$
Ist u harmonisch: $$u(\underline{y}) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial \underline{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \underline{n}}\right) d\underline{s}$$

Wähle $h = h_{\underline{y}}$, s.d. $h_{\underline{y}}(\underline{x}) = -\Gamma(\underline{x}, \underline{y}) \; \forall \underline{x} \in \partial\Omega$. Geht das, wird aus Integral
$$u(\underline{y}) = \int_{\partial\Omega} u(\underline{x}) \frac{\partial G}{\partial \underline{n}}(\underline{x}, \underline{y}) \, d\underline{s}(\underline{x})$$

· Gibt es obiges h, dann heißt $G = G(\underline{x}, \underline{y}) := \Gamma(\underline{x}, \underline{y})$ Green'sche Fkt. von Ω.

· Poisson'sche Int-Formel: Ist $K = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x}\|_2 \leq 1\}$ und $u: K \to \mathbb{R}$ harmonisch, dann gilt
$$u(\underline{y}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\underline{x}\|_2 = 1} u(\underline{x}) \frac{1 - \|\underline{y}\|^2}{\|\underline{x} - \underline{y}\|^n} d\underline{s}$$

Für Kugeln: $K = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x}\|_2 \leq 1\}$, $\hat{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|^2}$
$$G(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{cases} \Gamma(\|\underline{x} - \underline{y}\|) - \Gamma(\|\underline{y}\|_2 \|\underline{x} - \hat{\underline{y}}\|_2), & \underline{y} \neq 0 \\ \Gamma(\|\underline{x}\|_2) - \Gamma(1) \end{cases}$$

· Zum Dirichlet-Problem: Ist auf K Fkt. $g: K \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist durch
$$u(\underline{y}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\underline{x}\| = 1} g(\underline{x}) \frac{1 - \|\underline{y}\|_2^2}{\|\underline{x} - \underline{y}\|_2^n} d\underline{s}(\underline{x})$$ eine auf K stg. und auf $\|\underline{y}\| < 1$ harmon. Fkt. gegeben.

Satz v. Stokes: · Rotation: $\operatorname{rot} V = \nabla \times V = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}, \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)$ (Int-Bed. $\Leftrightarrow \operatorname{rot} V = 0$)
· Gegeben sei regul. Flächenstück $\gamma: U \to \mathbb{R}^3$, berandet durch geschlossenen Weg $\varphi: I \to \mathbb{R}^3$.
Oben auf d. Fläche sei dort, wo die Fläche links vom Durchlaufen d. Randes liegt. Auf d. Fläche gibt es ein „nach oben zeigendes" Einheitsnormalenfeld.
· Klassischer Satz: $$\int_\varphi \langle V, d\underline{x} \rangle = \int_\gamma \langle \operatorname{rot} V, \underline{n} \rangle \, do$$

Cartan Kalkül: · Ist V VF; der formale Ausdruck $\langle V, d\underline{x} \rangle = V_1 dx_1 + \dots + V_n dx_n$ nennt man ~~auch~~ Differentialform.
· dx_i ... Messapparat in i-te Koordinatenrichtung, $dx_i \wedge dx_j$ ... Flächenmesser in i-j-Koordinatenebene

- Es gilt: $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ ($\Leftarrow\Rightarrow$ $dx_j \wedge dx_j = 0$)
- Eine k-Differentialform auf $\mathbb{R}^n$ ist: $\sum\limits_{k \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k}(\underline{x})\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$
- Zu jedem VF $(f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x}))$ auf $\mathbb{R}^n$ gehört 1-Form $w(f) = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ und eine $(n-1)$-Form $\varphi(f) = f_1\, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \mp \dots + (-1)^{n+1} f_n\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$
- Differenzieren einer Diff-Form: $d: \Omega^{(k)} \to \Omega^{(k-1)}$: $df(\underline{x}) := \langle \nabla f, d\underline{x} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$
  - $ddw = 0 \quad \forall$ 2x stg. diffb. $w \in \Omega^{(k)}$ mit $k \leq n-2$
- Integration von Diff-Form: $w = f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

$$\int_U w = \int_U f\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Allg. Satz v. Stokes:
$$\int_{\partial G} w = \int_G dw$$

$\boxed{\text{Fkt.-Theorie}}$

Komplexe Diffbarkeit:

- Gegeben sind Fkt. auf offenen Teilen $U \subset \mathbb{C}$ mit Werten in $\mathbb{C}$; $f: U \to \mathbb{C}$. Interpretiere $z = x+iy \to \binom{x}{y}$; kann $f = g+ih$ mit reellen Fkt. $g, h: U \to \mathbb{R}$ auch als VF auf U verstanden werden: $\binom{x}{y} \to \binom{g(x,y)}{h(x,y)}$
- Existiert $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$

- konstante Fkt. sind komplex diffb. mit $f' = 0$
- $f(z) = z$ hat $f'(z) = 1$
- $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{N}$ hat $f'(z) = k \cdot z^{k-1}$

- Sind $f, g: U \to \mathbb{C}$ komplex diffbar. Dann auch
  - (i) $f+g$ mit $(f+g)' = f' + g'$
  - (ii) $f \cdot g$ mit $(f \cdot g)' = f'g + g'f$
  - (iii) $g \circ f$ mit $(g \circ f)' = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$

Bedingung f. komplexe Diffbarkeit:

CR-Dgl.: $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}$; $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$

Jacobi-Matrix f. VF: $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$

- Geometr. Bedeutung: $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ ist beste lin. Approx. vom Typ $f(z_0) + c(z - z_0)$ mit $c \in \mathbb{C}$ (Drehstreckung)
- Sind Fkt. auf ihrem Def-Bereich überall komplex diffbar, dann heißen sie holomorph. Ist Def.-Bereich ganz $\mathbb{C}$, dann ganze Fkt.
- Sei $f = g+ih: U \to \mathbb{C}$ holomorph; g, h seien als Fkt. von x, y 2 mal diffbar. Dann gilt: $\Delta g = \Delta h = 0$ ($\Leftarrow\Rightarrow$ zu jeder harm. Fkt. $g: U \to \mathbb{R}$ kann eine Fkt. $h: U \to \mathbb{R}$ gefunden werden, s.d. $g+ih$ holomorph auf U ist; h ist bis auf Konstante eindeutig)

Kurvenintegrale:

- $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; $f = g+ih: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann setze

$$\int_I f(t)\,dt = \int_I g(t)\,dt + i \int_I h(t)\,dt$$

- Sei $\gamma: I \to \mathbb{C}$ ein stückweise stg. diffb. Weg. Sei $f: U \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma(t) \in U \; \forall t \in I$.

$$\int_\gamma f\,dz = \int_I f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Zerlege in Re, Im:
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re} \int_\gamma f\,dz &= \int_I \left\langle \begin{pmatrix} g(\gamma(t)) \\ -h(\gamma(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} g \\ -h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle \\ \mathrm{Im} \int_\gamma f\,dz &= \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}\right\} \text{gewöhnliche Kurvenintegrale}$$

- Cauchy'scher Integralsatz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph und γ Randkurve eines Gebietes G mit $\underbrace{G \cup \partial G \subset U}_{!}$. Dann ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ (auch Umkehrung gilt!)
- Cauchy Integralformel: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ Randkurve eines Gebiets G mit $G \cup \partial G \subset U$ und $z_0 \in G$. Dann gilt: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$

- Ist $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist auch die Ableitung holomorph. Insbesondere ist f beliebig oft komplex diffbar und alle Ableitungen sind holomorph.

- Cauchy-Int-Formel f. Ableitungen: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

Konsequenzen d. Cauchy-Int-Formel:

- Sei $f_n: U \to \mathbb{C}$ Folge holomorpher Fkt. Die Folge heißt lokal gleichmäßig konvergent auf U, wenn es zu jedem Pkt. $z_0 \in U$ eine Kreisscheibe $|z-z_0| \leq r$ mit $r > 0$ gibt, wo f gleichmäßig konvergent.
- Eine auf U lokal gleichmäßig konvergente Folge f_n holomorpher Fkt. hat eine holomorphe Grenzfkt. f.
- Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, dann ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $|z| < R$ holomorph.
  ($\Rightarrow$ Potenzreihen liefern auf ihrer Konvergenzkreisscheibe holomorphe Funktionen)
- Sei $U \subset \mathbb{C}$ off., $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph; $z_0 \in U$. Sei K die größte offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und $K \subset U$. Dann konvergiert die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt z_0 auf K gegen f, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k = f(z) \ \forall z \in K$.

- $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\gamma: [a,b] \to U$ ein diffbarer Weg, $\gamma(a) \neq \gamma(b)$. Es gelte $f(\gamma(t)) = g(\gamma(t))$ für $a < t < b$ $\Rightarrow f = g$ auf U.
- Sei $U \subset V \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ und $F: V \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = F(z)$ auf $z \in U$. Dann heißt F analytische Fortsetzung von f. Diese ist eindeutig bestimmt.

Komplexer Logarithmus

$$\log(z) = \log|z| + i \arg z$$

- Satz v. Liouville: Jede beschränkte ganze Fkt. ist konstant
- Fundamentalsatz d. Algebra: ist p Polynom mit kompl. Koeff. und Grad ≥ 1, dann hat p in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.
  $\hookrightarrow$ Jedes komplexe Polynom $p(z)$ vom Grad n kann in der Form $p(z) = c(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$ mit c = Leitkoeff. von p geschrieben werden (p hat in z_0 NS k-ter Ordnung: $p(z_0) = \dots = p^{(k-1)}(z_0) = 0$, $p^{(k)}(z_0) \neq 0$)
- Sei $U \subset \mathbb{C}$ off., $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(U)$ offen (in $\mathbb{R}$ falsch!)

Laurent-Reihe:

- Ist f ~~holomorph~~ $: \{z : 0 < |z| < R\} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann hat f eine Darstellung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Diese Reihenentwicklung heißt Laurent-Reihe.
- z_0 heißt Singularität von f, wenn f in $0 < |z-z_0| < r$ mit $r > 0$ holomorph ist.
- Zu jeder isolierten Singularität hat f Laurententwicklung: ist z_0 isol. Singularität, dann setze $w = z - z_0$. Dann wird $w = 0$ zur Singularität, bestimme Laurent in w.
- Sind $z_0, z_1, \dots$ Singularitäten von f, dann herrscht Konvergenz in $0 < |z-z_0| < R$ mit $R = \min_{j \geq 1} |z_0 - z_j|$
- Klassifikation v. Singularitäten:
  - Ist z_0 isolierte Singularität d. holom. Fkt. f mit Laurententwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, und sind ∞ viele d. a_i von 0 verschieden, dann heißt z_0 wesentl. Singularität.
  - Gibt es $a_{-k} \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$, dann heißt z_0 hebb. Singularität
- Ist z_0 wesentl. Singularität von f und $c \in \mathbb{C}$ beliebig, dann ex. $z_n \to z_0$ mit $f(z_n) \to c$.
- Ist z_0 isol. Singularität von f und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ die Laurent-Entwicklung, dann heißt
  $$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \operatorname{res}_{z=z_0} f$$
  das Residuum von f in z_0

- Residuensatz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ sei holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Sei $\gamma: I \to U$ ein geschlossener Weg, dessen Inneres zu U gehört. Auf dem Rand liege keine Singularität. Dann gilt:
  $$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_i \operatorname{res}(f, z_i)$$

- Methoden z. Bestimmung: (i) Aus Laurent-Reihe ablesen
  (ii) Polstelle n-ter Ordnung: $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left[(z-z_0)^n f(z) \right]$

- Ist $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit Polynomen P, Q und $\operatorname{grad} Q > \operatorname{grad} P + 2$, dann ist $\sum_{z \in \mathbb{C}} \operatorname{Res} R = 0$

  (Vorsicht: falsch bei $R(z) = \frac{1}{z}$!)

- Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ rat. Fkt, $\operatorname{grad} Q > \operatorname{grad} P + 2$. Auf $\mathbb{R}$ sei $Q(x) \neq 0$. Dann gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res} R(z)$

  (hat R viele Pole in $\operatorname{Im} z > 0$, aber wenige in $\operatorname{Im} z < 0$, dann bemerke $\sum_{\text{alle}} \operatorname{Res} = 0$)

- Trigonometr. Integrale: $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz}\,dz$

- <u>Nullstellenzähler</u>: Sei γ geschlossener Weg, dessen Inneres ganz in U liegt, auf dem Weg sind keine Nst. d. holom. Fkt. $f: U \to \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \#_{NS} (\text{mit Vf.}) \underbrace{- \#_{PS} (\text{mit Vf.})}_{\text{falls Polstellen im Inneren von } \gamma \text{ ex.}}$$

HM III Zusammenfassung

- Nullstellenzähler: (i) Sei γ geschlossener Weg, dessen Inneres ganz in U liegt und auf dem keine Nst. d. holomorphen Fkt. $f: U \to \mathbb{C}$ liegt. Dann gilt: $\#_{Nst.} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ (mit Vielfachheit)

  (ii) $\#_{Nst.} - \#_{Polstellen} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

- $\pi \cdot \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)$

DGL:

- Sei $p(z)$ ganze Fkt. und $w(z)$ holomorph in Umgebung von 0 mit $w'(z) = p(z) \cdot w(z)$. Dann gilt

  $(n+1) w_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} p_k w_{n-k}$ (*)

  Ist $w(0) = w_0$ gegeben, dann sind alle Lsg. bestimmt

- Sei U offen, $0 \in U$ und $\{|z| < R\} \subset U$. Sei p holomorph auf U. Sei $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$. Diese hat dann Konv.-Radius von mindestens R. Dann gibt es zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$ genau eine auf U holomorphe Fkt. $w(z)$ mit $w(0) = w_0$ und $w' = p \cdot w$ durch (*)
- Allg.: $w^{(n)} + p_1(z) w^{(n-1)} + \ldots + p_n(z) w = 0$ hat mit $|z| < R$ holomorphen Koeff. $p_j(z)$ stets ein n-dim. Lösungsraum holomorpher Fkt., diese können über Potenzreihenansatz gefunden werden.

- Sei p, q in $0 < |z - z_0| < R$ holomorph ~~[illegible]~~. In z_0 habe p einen Pol höchstens 1. Ordnung und in q einen Pol höchstens 2. Ordnung. Dann heißt z_0 „schwache Singularität" der Dgl. $w'' + p w' + q w = 0$. Es genügt, Lösung i. d. Umgebung einer schwachen Singularität zu verstehen!

- Komplexe Potenz: $z^\rho = \exp(\rho \log z)$ mit $\log z = \log|z| + i \arg z$

- $F(x, y(x), \ldots, y^{(k)}(x)) = 0$ heißt gewöhnliche Dgl. k-ter Ordnung

  $y^{(k)}(x) = G(x, y(x), \ldots, y^{(k-1)}(x))$ heißt explizite Dgl. k-ter Ordnung

- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$; $v: U \to \mathbb{R}^n$ VF, stetig; eine Integralkurve zu v ist ein diff'barer Weg $\varphi: I \to U$ mit $\varphi'(t) = v(\varphi(t))$.

  Ist VF $v = v(t)$ (Zeit), heißt dies dynamisches System.

- Eine Abb. $F: I \times U \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-stetig (zur Konstanten L), wenn gilt: $\| F(t, \underline{x}_1) - F(t, \underline{x}_2) \| \leq L \| \underline{x}_1 - \underline{x}_2 \|$ $\forall t \in I$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in U$

- Sei F Lipschitz-stetig, $t_0 \in I$; $\underline{x}_0$. Dann gibt es $J \subset I$ offen, $t_0 \in J$ und eine Lsg. $\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(t_0) = \underline{x}_0$. Diese Lsg. ist durch $t_0, \underline{x}_0$ eindeutig festgelegt. ($\| (z_1, \ldots, z_n) \| = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$!)

- Picard-Lindelöf-Verfahren: $\varphi_k(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) d\tau$ [mit $\varphi_0(\tau) = \underline{x}_0$] konvergiert gleichm. gegen Lösung d. AWP
- Ist F Lipschitz-stetig, dann gibt es genau eine lokale Lösung jedes AWP.
- Ist $F: I \times U \to \mathbb{R}^n$ stg. diff'bar, dann auch (lokal) Lipschitz-stetig
- Sei $F: I \times U$ lokal Lipschitz-stetig. Dann kann jede Lsg. von $\underline{x}' = F(t, \underline{x})$ zu einer maximalen fortgesetzt werden. (entweder ex. Lsg. auf ganz I, oder es gibt max. Teilintervall $J \subset I$, auf dem Lsg. def. ist; dann erreicht Lsg. den Rand von U → „Lsg. laufen von Rand zu Rand")
- Euler-Polygonzugverfahren: $y' = f(x, y)$; konstruiere Polygonzug: auf $[x_0, x_0 + h]$ ~~nehme~~ Strecke durch (x_0, y_0) mit Steigung $f(x_0, y_0)$. Sei $x_1 = x_0 + h$; (x_1, y_1) sei Endpunkt dieser Strecke. Wdh. mit (x_1, y_1) als Startpunkt. ⇒ stg. Fkt. $p(h, x): [x_0, \tilde{x}(h)] \to \mathbb{R}$
- $\lim_{h \to 0} p(h, x)$ ex. und löst das AWP $y(x_0) = y_0$ (keine Eindeutigkeit!)

Lineare Dgl: $\underline{x}'(t) = A(t) \underline{x}(t) + \underline{b}(t)$

- Seien $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $\underline{b}: I \to \mathbb{K}^n$, $A: I \to \mathbb{K}^{n \times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R} / \mathbb{C}$) stetig. Sei $t_0 \in I$, $\underline{x}_0 \in \mathbb{K}^n$. Dann hat AWP $\underline{x}'(t) = A(t) \underline{x}(t) + \underline{b}(t)$ mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ genau eine Lsg. $\varphi: I \to \mathbb{K}^n$.
- $\mathcal{L} = \{ \varphi: I \to \mathbb{K}^n : \varphi'(t) = A(t) \varphi(t) \}$; ist $\mathbb{K}$-VR, $\dim \mathcal{L} = n$. $\forall t_0 \in I$ ist die Abb. $\mathcal{L} \to \mathbb{K}^n: \varphi \mapsto \varphi(t_0)$ linear und bijektiv
- Ist $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Basis von $\mathcal{L}$, bilde $\Phi(t) := (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ .. Fundamentalsystem [$\Phi'(t) = A(t) \Phi(t)$]

- Spur $A =: a_{ii}$ $(1 \le i \le n)$

- Sei $\underline{\Phi}(t)$ ein F-System für $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$. Dann gilt $\frac{d}{dt} \det \underline{\Phi} = (\text{Spur } A(t)) \underbrace{\det \underline{\Phi}(t)}_{\text{Wronski-Determinante}}$

  ↳ $\det \underline{\Phi}$ const. $\iff$ Spur $A(t) = 0$ $\iff$ „Volumentreue Zeitentwicklung"

- Variation d. Konstanten: Seien $A(t), \underline{b}(t)$ stg., $\underline{\Phi}$ F-System von $\underline{x}' = A\underline{x}$. Dann löst

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{c}(t) \quad \text{mit} \quad \underline{c}(t) = \int_{t_0}^{t} \underline{\Phi}(s)^{-1} \underline{b}(s)\, ds$$ die inhomogene Dgl

Verlauf d. Int-Kurven

- eine stg. diffbare Fkt. $E: U \to \mathbb{R}$ mit $\partial_{\underline{v}} E = \langle \operatorname{grad} E, \underline{v} \rangle = 0$ auf U heißt Erstes Integral von v.
- Int-Kurven von v verlaufen in Niveaulinien $E = $ const. eines Ersten Integrals
- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $v: U \to \mathbb{R}$ stg. Vf. Sei $\varphi: (\alpha, \beta) \to U$ eine max. Int-Kurve d. Dgl. $\underline{x}' = v(\underline{x})$
  Der Grenzwert $x_0 \lim_{t \to \beta} \varphi(t)$ ex., es sei $x_0 \in U$. Dann gelten $\beta = \infty$; $v(\underline{x}_0) = \underline{0}$.

  ↳ $\underline{x} \in U$ mit $v(\underline{x}) = 0$ heißen krit. Punkte d. Vf.

  (ist v noch Lipschitz-stetig, kann keine jede Lsg. an krit. Punkt kommen)

- Sei $v: U \to \mathbb{R}^n$ stg. Vf mit $v(\underline{x}_0) = 0$ für ein $x_0 \in U$. Gibt es zu jeder Umgebung $W_\varepsilon = \{\underline{x} : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \varepsilon\}$ ein $\delta > 0$, s.d. jede max. Int-Kurve φ von $\underline{x}' = v(\underline{x})$ mit $\varphi(0) \in W_\delta$ zu allen posit. Zeiten in W_ε verbleibt, dann heißt x_0 Attraktor.
  Insbesondere ist dann $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = x_0$ für jeden Startwert $\varphi(0) \in W_\varepsilon$

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda_1 \dots \lambda_n$ seien komplexe EW (mit Vf.) aufgelistet. Gilt $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ $\forall 1 \le j \le n$, dann ist $\underline{0}$ ein Attraktor.
  Beachte: $\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \Rightarrow \lambda_j \neq 0$ $\forall$ EW, $\det A \neq 0$, also $\underline{0}$ d. einzige krit. Punkt.

Attraktor = "stabiler krit. Pkt" [illegible]

- Sei $v: U \to \mathbb{R}^n$ stg. diffb. Vf und x_0 sei krit. Pkt. Ist $A = J_v(x_0)$ und haben alle kompl. EW von A neg. Realteil, dann ist x_0 Attraktor.

- $v: U \to \mathbb{R}^n$ stg. Vf. $x_0 \in U$ mit $v(\underline{x}_0) = 0$ ($\Rightarrow \underline{x}(t) = x_0$ ist also Lsg. d. AWP $\underline{x}' = v(\underline{x})$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$)

  (i) zu $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ mit:

  Ist $\|\underline{x} - x_0\| < \delta$, dann hat jede Int-Kurve $\varphi' = v(\varphi)$ mit $\varphi(0) = \underline{x}$ zu allen Zeiten t höchstens $\|\varphi(t) - x_0\| < \varepsilon$ (daraus lebt φ mindestens auf $[0, \infty)$).

  ↳ x_0 ist stabiler Punkt

  gilt zus.: (ii) $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = x_0$ $\forall \varphi$ nach (i) $\Rightarrow$ x_0 heißt Attraktor

Fluss d. Vf: $v: U \to \mathbb{R}^n$ sei stg. Vf. auf U. Insbesondere habe AWP $\underline{x}' = v(\underline{x})$, $x(0) = x_0$ eindeutige max. Lsg.

- Geg. sei v, $x_0 \in U$ und $\varphi: [0, b] \to U$ ein Integralkurve von $\underline{x}' = v(\underline{x})$ mit $\varphi(0) = \underline{x}_0$. Dann gibt es $r \ge 0$, $L > 0$, s.d.

  (i) jede Lsg. eines AWP $\underline{x}' = v(\underline{x})$, $\|\underline{x}(0) - \underline{x}_0\| \le r$ ist mindestens auf $[0, b]$ definiert

  (ii) Sind ψ_1, ψ_2 Integralkurven mit $\|\psi_i(0) - x_0\| \le r$, dann gilt
  $$\|\psi_1(t) - \psi_2(t)\| \le \|\psi_1(0) - \psi_2(0)\| e^{Lb}$$

  (iii) Liegt $K_\varrho \subset U$, dann kann $L = \max_{x \in K_\varrho} \|J_v(\underline{x})\|$ gewählt werden

  K_ϱ: Um jeden Pkt. $\varphi(t)$ lege Kreisscheibe mit Radius $\varrho > 0$. Deren Vereinigung heiße K_ϱ

  $r e^{Lb} = \varrho \to$ nach r auflösen

- Sei v wie oben, $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$. Sei $U_0 \subset U$. Gibt es Fkt. $\underline{\Phi}: I \times U_0 \to U$ mit $t \to \underline{\Phi}(t, \underline{x}_0)$ löst AWP $\underline{x}' = v(\underline{x})$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$.
  Dann heißt $\underline{\Phi}$ d. (lokale) Fluss auf $I \times U_0$ (ist $I = \mathbb{R}$, $U_0 = U$ $\Rightarrow$ globaler Fluss)

Frage: Math. Pendel $x'' = y$ geometr. Darstellung

V

Alternativ: $\frac{d\Phi}{dt}(t,\underline{x}) = v(\Phi(t,\underline{x}))$; $\Phi(0,\underline{x}) = \underline{x}$ ... lokaler Fluss

- Jeder Fluss ist stg. diffbar (als Fkt. von $(t,\underline{x})$).
- Fixiere ein $t \in I$. Dann heißt $\Phi_t : U_0 \to U : x \to \Phi(t,\underline{x})$ Zustandsabbildung (~~ist bijektiv~~, bildet U_0 für jedes t bijektiv & ~~diffbar~~ auf $\Phi_t(U_0)$ ab)
- Sei U offen, $U \subset \mathbb{R}^n$, $K \subset U$ kompakt. Sei $U_0 \subset K$. Dann gibt es $c > 0$ (hängt von K ab!), s.d. mindestens auf $[0,c] \times U_0$ der lokale Fluss existiert.
- Fluss ist stg. diffb. auf $I \times U_0$.

$$\frac{\partial}{\partial t} J_{\Phi_t}(\underline{x}) = J_v(\Phi(t,\underline{x}))\, J_{\Phi_t}(\underline{x}) \quad | \det.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \det J_{\Phi_t}(\underline{x}) = \operatorname{div} v(\Phi(t,\underline{x})) \det J_{\Phi_t}(\underline{x}) \quad \text{(anschauliche Def. d. Divergenz)}$$

Fourier-Trafo:
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, L-intbar $\left(= \int_{-\infty}^{\infty} |f| dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \text{ ex.} \right)$

  $L^1(\mathbb{R}) = \{$alle solche $f\}$
- $f \in L^1(\mathbb{R})$: $\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t x} dt$ ... heißt Fourier-Transformierte von f
- $L^1(\mathbb{C}) = \{ f = g + ih : g, h \in L^1(\mathbb{R}) \}$
- $\hat{f} := \hat{g} + i\hat{h}$
- ist $f \in L^1(\mathbb{C})$, dann ist $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stg. und es gilt $\lim_{x\to\infty} \hat{f}(x) = 0$
- allg. Prinzip: ist f „stark lokalisiert", dann ist $\hat{f}$ breit

  Faltung: $f, g \in L^1(\mathbb{R})$: $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy$

  (i) $f * g = g * f$

  (ii) $(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$

  (iii) $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

- $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R})$
- $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $f(x) = 0$ außerhalb eines endl. Intervalls. Dann hat $\hat{f}$ Werte $\neq 0$ mit beliebig großen x.
- einige Trafo-Formeln: (i) $f, g \in L^1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \hat{g} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f} g$

  (ii) ${}^h f : x \to f(x+h) \Rightarrow \widehat{{}^h f}(x) = e^{2\pi i h x} \hat{f}(x)$

  (iii) $f \in L^1$, $\lambda > 0$; $f_\lambda = \lambda \cdot f(\lambda \cdot x) \Rightarrow \hat{f}_\lambda(x) = \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$

  (iv) $\hat{f'}(x) = 2\pi i x \hat{f}$ (wenn $f, f' \in L^1$ mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$)

  (v) $\frac{d}{dx} \hat{f} = -\left(2\pi i t f(t)\right)^{\wedge}(x)$ (wenn $f(t)$ und $t \cdot f(t) \in L^1$)

- Summationskern: $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

  (i) $k \in L^1$, $\hat{k} \in L^1$

  (ii) $k(x) \geq 0$, $\hat{k}(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

  (iii) $k(0) = \hat{k}(0) = 1$

  (iv) $k(x) = k(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

  (v) $\hat{\hat{k}} = k$

- Ist k Summationskern, dann auch $\hat{k}$
- Ist k Summationskern und $\lambda > 0$, dann gilt $\hat{k}_\lambda = k_\lambda$
- Sei $f \in L^1$, in 0 stetig und $|f| \leq c$ $\forall x$. Dann gilt für jeden Summationskern k: $\lim_{\lambda\to\infty} f * k_\lambda(0) = f(0)$ →

- Ist $k = e^{-\pi t^2}$, gilt diese Gleichung für alle $f \in L^1$, die in 0 stg. sind (f muss nicht beschränkt sein)
- Fourier'scher Int-Satz: Sei $f \in L^1$, in 0 stg. und beschränkt. Dann gilt für jeden Summationskern:
$$f(0) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat f(x) \hat k\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx \qquad \left(\text{Spezialfall: } k(t) = e^{-\pi t^2}: \ f(0) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat f(x) e^{-\pi (x/\lambda)^2} dx\right)$$
- Fourier'sche Umkehrformel: Ist $f \in L^1$, in $h \in \mathbb{R}$ stetig und auf $\mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt für jeden Summationskern:
$$\lim_{\lambda\to\infty} \int \hat f(t) e^{2\pi i t h} \hat k\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt = \frac{1}{2}(f(h+) + f(h-))$$

Spezialfälle: $k(t) = e^{-\pi t^2}$. Dann muss f nicht beschränkt sein; für $f \in L^1$ mit $f(h+), f(h-)$ ex. gilt:
$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat f(t) e^{2\pi i h t} e^{-\pi t^2/\lambda^2} dt = \frac{1}{2}(f(h+) + f(h-))$$

- Ist sogar $\hat f \in L^1$, dann gilt sogar die Umkehrformel: $\int_{-\infty}^{\infty} \hat f(t) e^{2\pi i t h} dt = \frac{1}{2}(f(h+) + f(h-))$

Fourier-Reihe:
- $f: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ sind dasselbe wie 1-period. Fkt.

$\hat f(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$, $n \in \mathbb{N}$ ... heißen Fourier-Koeffizienten

- $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \Rightarrow \lim_{|n|\to\infty} \hat f(n) = 0$
- $f, g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, und es gilt: $\widehat{f*g} = \hat f(n) \cdot \hat g(n)$

Faltung auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: $f * g(x) = \int_0^1 f(y) g(x-y) dy$

$\mathbb{Z}$: $f, g: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. $f * g = \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y)$

- Approx. d. Faltungseins: Sei $k_N(t) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}\right)^2$. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ in $x \in [0,1]$ stg.

Dann gilt $\lim_{N\to\infty} k_N * f(x) = f(x)$

- Umkehrformel: sei $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, in $x \in [0,1]$ gebe es die Grenzwerte $f(x+)$ und $f(x-)$. Dann ist
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\le N} \hat f(n) e^{2\pi i n x}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$$

Ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat f(n)|$ konvergent, dann: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat f(n) e^{2\pi i n x} = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$

- stetige, 1-period. Fkt. sind durch Angabe ihrer F-Koeff. eindeutig bestimmt.
- Ist $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 2 mal stg. diffbar, dann gilt: $|\hat f(n)| \le \frac{1}{(2\pi n)^2} \int_0^1 |f''(t)| dt$
- Jede 2mal stg. diffb. 1-period. Fkt. kann in der Form $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat f(n) e^{2\pi i n x}$ geschrieben werden.

$f, g \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Dann gilt $\check{(f*g)} = \check f \, \check g$ mit $\check f(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{2\pi i n x}$ (diese Reihe konv. gleichmäßig und deshalb ist $\check f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ sogar stetig.)

Poisson'sche Summenformel:

- $f \in L^1(\mathbb{R})$: $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ ... hat Periode 1
- Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und 2x stg. diffbar. Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+x)$ konvergiere gegen eine stg. Fkt.

Dann gilt:
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat f(k) e^{2\pi i k x}$$

Schwartz-Raum:
- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt rasch fallend, wenn: (i) f ∞ oft diffbar

(ii) für Polynome $P, Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gelte: $\lim_{\|x\|\to\infty} P(x) Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(x) = 0$

alternativ:

$\lim_{|x|\to\infty} x^k f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall k, \forall n$

- Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und f sei ∞ oft diffbar mit $f(x) = 0 \ \forall x \notin K$. Dann ist f rasch fallend.
- Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rasch fallend. Dann ist auch $\hat f$ rasch fallend.
- $\mathfrak{S}^n$ = Menge aller rasch fallenden Fkt. auf $\mathbb{R}^n$
- $\wedge: \mathfrak{S}^n \to \mathfrak{S}^n$ bijektiv (vgl. Trafo-Formel)
- Auf $\mathfrak{S}^n$ gibt's Skalarprodukt: $\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx$
- $\langle f, g\rangle = \langle \hat f, \hat g\rangle$

- $\int f \hat{g}\, dx = \int \hat{f} g\, dx \iff \langle f, \hat{g} \rangle = \langle \hat{f}, g \rangle$
- wegen $\hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} = f$ kommen nur EW $\pm 1, \pm i$ vor
- $\|f\|_2^2 := \int |f(\underline{x})|^2\, dx$ ist Norm
- Parsevall'sche Ungleichung: $\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2\, d\underline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}|^2\, d\underline{x}$
- Seien $f_n \in \mathcal{S}$ eine Folge rasch fallender Fkt. und $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ mit $\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon\ \forall n, m > N$. Dann gibt es eine Nullmenge $E \subset \mathbb{R}^n$, s.d. $\lim_{n\to\infty} f_n(\underline{x}) =: f(x)\ \forall \underline{x} \notin E$. Und es gilt: $\int |f|^2 d\underline{x} < \infty$. Wird $\mathcal{S}^n$ durch diese Grenzwerte ergänzt, wird aus $\mathcal{S}^n$ vollst. Raum mit Skalarprodukt. Dieser heißt $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ außerhalb von $|x| < N$ für geeignetes N. Hat auch $\hat{f}$ diese Eigenschaft, dann ist $\hat{f} \equiv 0$ (und damit auch f).
- Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dann gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\hat{f}(t)|^2 dt \geq 4\pi^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt \right)^2$ (Heisenberg'sche Unschärferelation)

Laplace-Transformation:

- $f: [0, \infty) \to \mathbb{C}$

  $\mathcal{L} f(s) := \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-ts}\, dt$ … Laplace-Transformierte
- Existenz: Ist f messbar und gibt es $M, a \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M \cdot e^{ax}$, dann ex. $\mathcal{L} f(s)\ \forall s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > a$ (f heißt zulässig)
- Gibt es ein $s_0 \in \mathbb{C}$, s.d. $\mathcal{L} f(s)$ ex., dann ex. das Integral $\mathcal{L} f(s)\ \forall s$ mit $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$.
- $\inf \{ \operatorname{Re} s_0 : s_0 \in \mathbb{C} : \mathcal{L} f(s_0) \text{ ex.} \} = \sigma_0(f)$ … Konvergenzabszisse
- $\frac{d}{ds} \mathcal{L} f(s) = -\mathcal{L}(x \cdot f(x))(s)$
- $\mathcal{L}(f')(s) = s \cdot \mathcal{L} f(s) - f(0)$
- Faltung: $f * g(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$
- f, g zulässig. Dann ist auch $f * g$ zulässig und es gilt: $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$
- Umkehrformel: Sei $f: [0, \infty) \to \mathbb{C}$ zulässig; $g(s) := \mathcal{L} f(s)$. Sei $c \in \mathbb{R}$, s.d. das Integral ex., dann gilt: $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(s)\, e^{sx}\, ds$
- Seien f, g zulässig $\Rightarrow f \cdot g$ zulässig und es gilt:

  $$\mathcal{L}(f \cdot g)(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{L}(f)(w)\, \mathcal{L}(g)(s-w)\, ds$$

  Sobald das Int. als $L^1(\mathbb{R})$ ex. (z.B. für $c > 1 + \max(\sigma(f), \sigma(g))$)

Mellin-Trafo:

- $\mathcal{M} f(s) := \int_0^{\infty} f(x)\, x^{s-1}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, e^{s \log x}\, dx$
- Subst. $\log x = t$ führt auf $\mathcal{L}$-Trafo, die auf $(-\infty, \infty)$ def. ist.
- Faltung: $f * g = \int_0^{\infty} f(y)\, g\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y}$
- Umkehrformel: $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M} f(s)\, x^{-s}\, dx$

Fourier $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi i t x}\, dt \qquad (Ex.: f \in L^1)$

Faltung: $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, dy$

$^h f : x \mapsto f(x+h) \quad \longmapsto \quad \hat{^h f}(x) = e^{2\pi i h x}\, \hat{f}(x)$

$f_\lambda : x \mapsto \lambda \cdot f(\lambda x) \quad \longmapsto \quad \hat{f}_\lambda(x) = \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$

$\widehat{f'}(x) = 2\pi i x \hat{f}$

$\frac{d}{dx} \hat{f} = -\left(2\pi i t f(t)\right)^\wedge (x)$

Umkehrformel: $\cdot\ \frac{1}{2}\left(f(h+) + f(h-)\right) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f} \cdot \hat{k}\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx$

(Vss.: f beschränkt, $\in L^1$, k = Summationskern)

$\cdot\ \frac{1}{2}\left(f(h+) + f(h-)\right) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\, e^{2\pi i h t}\, e^{-\pi t^2/\lambda^2}\, dt$

(Vss.: f nicht beschränkt, $f \in L^1$)

$\cdot\ \frac{1}{2}\left(f(h+) + f(h-)\right) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\, e^{2\pi i h t}\, dt$

Summationskerne: (i) $k(x) = \max(0, 1-|x|) \mapsto \hat{k} = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$

(ii) $k(x) = e^{-\pi x^2} \mapsto \hat{k} = e^{-\pi t^2}$

Laplace $\mathcal{L} f(s) := \int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt$

$Ex.: |f| \leq M \cdot e^{\omega t}$

Faltung: $f * g(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$

~~Umkehrformel~~:

$\mathcal{L}(f')(s) = s \cdot \mathcal{L} f(s) - f(0)$

$\frac{d}{ds} \mathcal{L} f(s) = -\mathcal{L}\left(x \cdot f(x)\right)(s)$

Umkehrformel: $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} \mathcal{L} f(s)\, e^{sx}\, ds$

Fourier-Reihe: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$ mit $\omega = \frac{2\pi}{P}$

mit $a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cos(n\omega t)\, dt$, $b_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \sin(n\omega t)\, dt$

komplex: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$ mit $c_n = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$

$a_0 = 2 \cdot c_0$

$a_n = c_n + c_{-n}$

$b_n = i(c_n - c_{-n})$

$c_n = \left(\frac{a_{-n} + i b_{-n}}{2}\right) \quad n < 0$

$c_n = \left(\frac{a_n - i b_n}{2}\right) \quad n > 0$